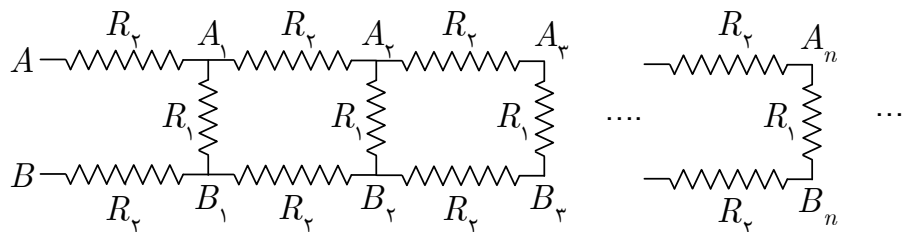
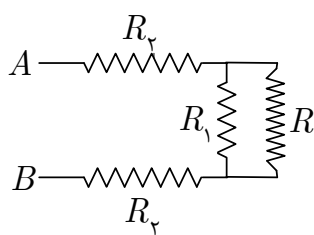


۱) در مدار شکل ۱، الگوی مقاومت‌های  $R_p - R_1 - R_p$  بین دو نقطه  $A$  و  $B$  بی‌نهایت بار تکرار می‌شود.



شکل ۱



شکل ۲

چون الگوی سه مقاومت تا بی‌نهایت تکرار می‌شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی‌کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطه  $A$  و  $B$  برابر  $R$  باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می‌شود.

آ) مقاومت  $R$  بین دو نقطه  $A$  و  $B$  را برحسب  $R_1$  و  $R_p$  به دست آورید.

در بخش‌های زیر فرض کنید ولتاژ  $V_0$  را به دو سر  $A$  و  $B$  وصل کرده‌ایم.

ب) ولتاژ  $V_1$  بین  $A_1$  و  $B_1$  در مدار شکل ۱ بر حسب  $V_0$ ،  $R_1$  و  $R$  چقدر است؟

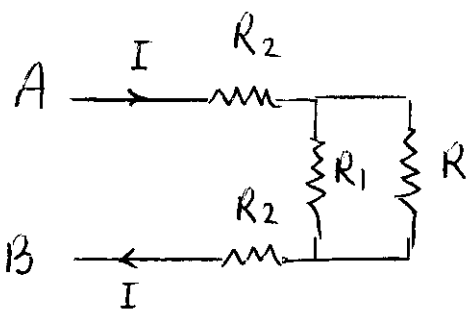
پ) ولتاژ بین  $A_n$  و  $B_n$  روی دو سر  $n$  امین  $R_1$  در مدار شکل ۱ بر حسب  $V_0$ ،  $R_1$ ،  $R$  و  $n$  چقدر است؟

ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت‌های  $R_1$  را با  $P_1$  نشان می‌دهیم.  $P_1$  را بر حسب  $V_0$ ،  $R_1$  و  $R_p$  به دست آورید.

ث) با فرض آن که  $x = \frac{R_1}{R_p}$  و  $y = \frac{P_1}{P}$  که  $P$  توان کل مصرفی در مدار است، رابطه  $y$  برحسب  $x$  را به

دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

(1) مشق



$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1} \quad (7)$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$\boxed{R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \quad (1)$$

$$I = \frac{V_0}{R} \quad , \quad V_{AB_1} = V_0 - 2R_2I \quad (2)$$

$$\boxed{V_1 = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2 \quad (3)$$

$$\boxed{V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n}$$

(ت) توان مصرفی در n امین شاخه  $P_n^{(R_1)}$  مساوی است با

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی در تمام شاخه ها

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

$$= \frac{V_0^2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \quad (4)$$

$$\boxed{P_1 = \frac{V_0^2 (R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2})}{2R_1 \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}}$$

با قرار دادن R از معادله (1) در (4) و ساده کردن جواب

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

توان کل مصرفی در مدار

$$y = \frac{P_1}{P}$$

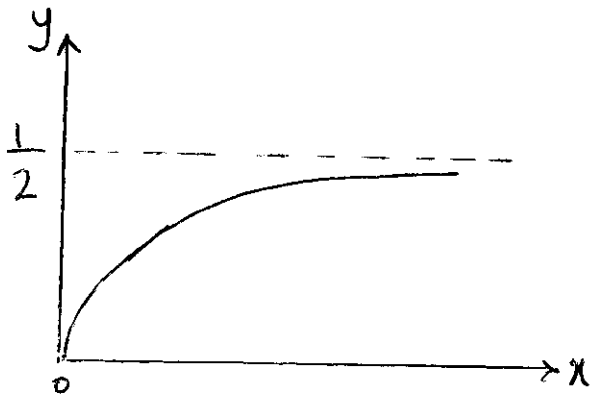
نسبت توان مصرفی در مقاومت  $R_1$  در مقادیر  $y$

به نسبتی در زیر من رسم

$$y = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \right)$$

اگر  $\frac{R_1}{R_2}$  را  $x$  بنویسیم

$$y = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \right)$$





۲) در پدیده دوپلر اگر یک چشمه صوتی متحرک با بسامد  $f_s$  با سرعت لحظه‌ای  $v_s$  حرکت کند، بسامد دریافت شده

توسط یک گیرنده ساکن  $f = f_s \frac{u}{u \pm v_s}$  است که  $u$  سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای

وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می‌شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می‌شود.

در صورتی که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد  $f_s$  در لحظه  $t'$  از چشمه منتشر

شود، در لحظه متفاوت  $t$  توسط گیرنده دریافت می‌شود. در این حالت  $v_s$  در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظه  $t'$

است و  $f$  بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظه  $t$  است.

حال فرض کنید یک چشمه صوتی با بسامد  $f_s$  از ارتفاع  $h$  از سطح زمین در لحظه  $t' = 0$  از حال سکون رها شود.

گیرنده‌ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد  $f(t)$  دریافت شده بر حسب زمان را اندازه‌گیری می‌کند.

فرض کنید چشمه در زمان  $t'$  بعد از رها شدن، صوت با بسامد  $f_s$  منتشر می‌کند. شتاب گرانش را  $g$  بگیرید و از نیروی

مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

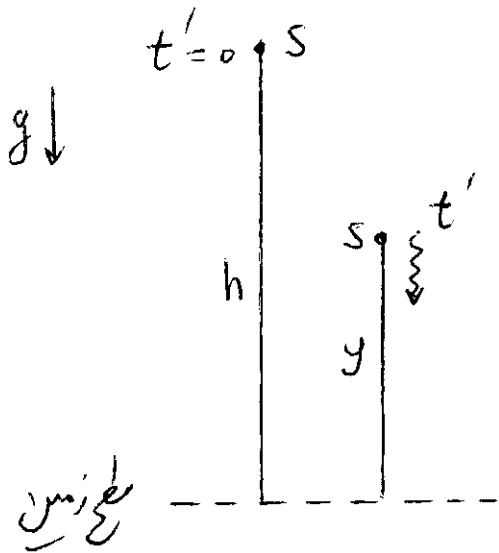
آ) زمان  $t'$  را بر حسب  $u$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  به دست آورید.

ب) سرعت چشمه در زمان  $t'$  یعنی  $v_s(t')$  را بر حسب  $u$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  به دست آورید.

پ) بسامد اندازه‌گیری شده توسط گیرنده روی زمین در زمان  $t$ ، یعنی  $f(t)$  را بر حسب  $f_s$ ،  $u$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  به

دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

ت) نشان دهید  $\frac{1}{f^2} = A + Bt$  و  $A$  و  $B$  را بر حسب  $f_s$ ،  $u$ ،  $g$  و  $h$  تعیین کنید.



مسئله (۲)  
 (۱) چشمه در لحظه  $t'=0$  در ارتفاع  $h$  از سطح زمین

و در لحظه  $t'$  در ارتفاع  $y$  از سطح زمین است

و سرعت آن  $v_s$  است

$$v_s = gt' \quad \text{و} \quad y = h - \frac{1}{2}gt'^2$$

صوت در لحظه  $t'$  ارسال می‌شود و در لحظه  $t$

بناگفته در زمین می‌رسد

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادله اخذ

$$gt'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}$$

$$v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}$$

(ب)

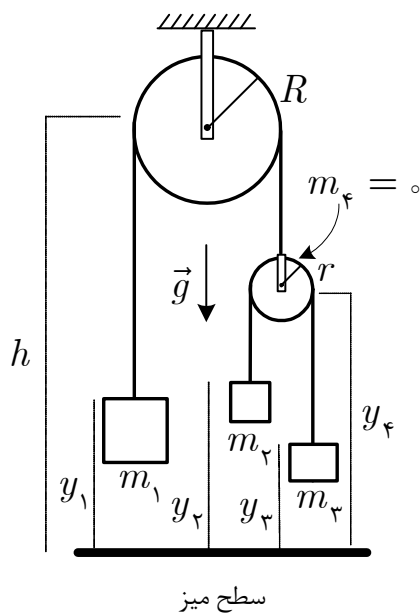
$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

(پ)

$$f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{f_s} \left( 1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u} \right) \quad \text{نیمه (ت)}$$

$$A = \frac{1}{f_s^2} \left( 1 + \frac{2gh}{u^2} \right), \quad B = -\frac{2g}{u f_s^2}$$



۳) سه جسم به جرم‌های  $m_1$ ،  $m_2$  و  $m_3$  به یک مجموعه نخ و قرقره مطابق شکل متصل‌اند. قرقره متحرک را جسم چهارم به جرم  $m_4 = 0$  در نظر بگیرید. قرقره ثابت و نخ‌ها نیز بدون جرم هستند. شتاب گرانش  $g$ ، شعاع قرقره ثابت  $R$ ، شعاع قرقره متحرک  $r$ ، طول نخ روی قرقره ثابت  $D$  و طول نخ روی قرقره متحرک  $d$  است. در لحظه  $t = 0$  در حالی که جرم‌ها در فواصل اولیه  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$  و  $y_4$  از سطح میز قرار دارند، دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. شتاب این چهار جسم نیز به ترتیب  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $a_3$  و  $a_4$  است.

آ) ارتفاع جرم‌ها از سطح میز در لحظه دلخواه  $t$  را به ترتیب  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$  و  $y_4$  بگیرید.  $D$  و  $d$  را بر حسب این کمیت‌ها،  $h$  فاصله مرکز قرقره ثابت از سطح میز،  $R$  و  $r$  بنویسید.

ب) در روابطی که در قسمت آ به دست آوردید، به ازای  $i = 1, 2, 3, 4$ ، هر کدام از  $y_i$ ‌ها را بر حسب زمان، شتاب مربوطه  $a_i$  و فاصله اولیه از سطح میز  $y_{i0}$  بنویسید.

پ) روابط قسمت ب را برای لحظه  $t = 0$  بنویسید و با ترکیب نتیجه به دست آمده با روابط قسمت ب، دو رابطه مستقل بین شتاب‌ها به دست آورید.

ت) قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های  $m_1$ ،  $m_2$ ،  $m_3$  و قرقره متحرک بنویسید و با استفاده از رابطه بین شتاب‌ها که در قسمت پ به دست آوردید، کلیه شتاب‌ها و کشش نخ‌ها را بر حسب جرم‌ها و شتاب گرانش به دست آورید.

ث) جسم  $m_2$  چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟



سازمان ملی پرورش استخوانبای جوشان

ج) با فرض  $y_3 = y_0$ ، مدت زمانی که طول می کشد تا لبه بالایی جسم  $m_p$  هم تراز با پایین ترین نقطه قرقره

متحرک شود، چقدر است؟

(۳)  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   
(۲)

$$\begin{cases} D = (h - y_1) + \pi R + (h - y_4) \\ d = (y_4 - y_2) + \pi R + (y_4 - y_3) \end{cases}$$

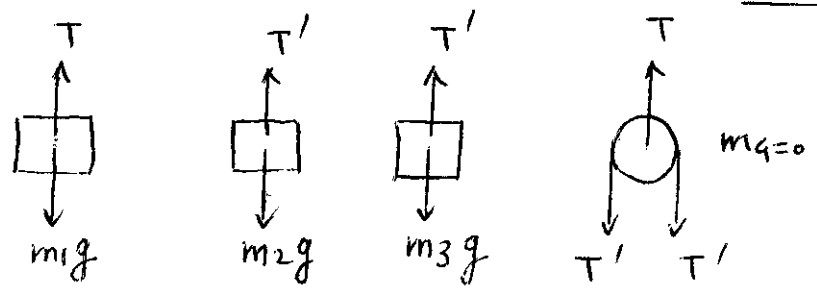
$$\begin{cases} D = (h - \frac{1}{2} a_1 t^2 - y_{10}) + \pi R + (h - \frac{1}{2} a_4 t^2 - y_{40}) \\ d = (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_2 t^2 - y_{20}) + \pi R + (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_3 t^2 - y_{30}) \end{cases}$$

(ب) روابط قسمت آ) برار کنیم  $t=0$  نیز  $y_{10}$  و  $y_{40}$  در سمت راست بماند سنی

$$\begin{cases} D = (h - y_{10}) + \pi R + (h - y_{40}) \\ d = (y_{40} - y_{20}) + \pi R + (y_{40} - y_{30}) \end{cases}$$

از معادله ب) روابط قسمت ب) بود

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} a_1 t^2 - \frac{1}{2} a_4 t^2 = 0 \\ a_4 t^2 - \frac{1}{2} a_2 t^2 - \frac{1}{2} a_3 t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ 2a_4 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ 2a_4 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$



(ج) نمودار جسم آزاد

$$\begin{aligned} T - m_1 g &= m_1 a_1 & (2) \\ T' - m_2 g &= m_2 a_2 & (3) \\ T' - m_3 g &= m_3 a_3 & (4) \\ T - 2T' - (0)g &= (0)a_4 & (5) \end{aligned}$$

$T' = T/2$

اگر معادلات (۲)، (۳) و (۴) را به ترتیب در  $m_1 m_2$ ،  $m_1 m_3$  و  $2m_2 m_3$  ضرب و جمع کنیم، خواهیم داشت

$$2 m_2 m_3 (T - m_1 g) + m_1 m_3 (\frac{T}{2} - m_2 g) + m_1 m_2 (\frac{T}{2} - m_3 g) = 0$$

$$\boxed{T = \frac{8 m_1 m_2 m_3 g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} \quad , \quad T' = \frac{T}{2}}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲)، (۳) و (۴)؛



$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_4 = -a_1$$

$$a_2 = \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_3 = \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}}$$

ث (بدار این  $a_2 > 0$  نه)

$$y_{20} + \frac{1}{2}(d - r) = y_{40} \quad ; \quad y_{20} = y_{30} \quad \text{(ج) وقتی}$$

$$y_2(t) = y_4(t) - r \quad \text{ی خواهم}$$

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + y_{20} = \frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - r$$

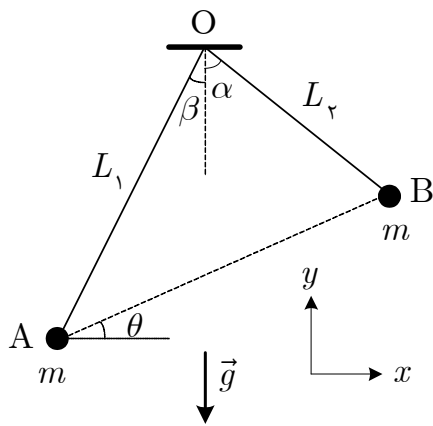
$$(a_2 - a_4) t^2 = d - r(2 + \pi)$$

$$\frac{2(m_1m_3 - m_1m_2)g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} t^2 = d - r(2 + \pi)$$

$m_3 > m_2$  نه

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{d - r(2 + \pi)}{2g} \frac{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1(m_3 - m_2)}}$$

در نتیجه!



۴) دو گلوله کوچک هر یک به جرم  $m$  دارای بار الکتریکی هم نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول های  $L_1$  و  $L_2$  متصل اند. دو انتهای دیگر نخها به تکیه گاهی واقع در نقطه  $O$  بسته شده اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله ها به گونه ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعه الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویه  $\alpha$  معلوم است.

آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای  $x$  و  $y$  برای هر یک از گلوله ها بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\theta$ ، اندازه نیروی دافعه کولنی  $F$ ،  $mg$  و نیروی کشش نخها بنویسید.

ب) با استفاده از معادلات قسمت آ،  $\tan \theta$  را بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های  $\alpha$  و  $\beta$  به دست آورید.

پ) طول پاره خط  $AB$  را  $d$  بنامید.  $d \sin \theta$  و  $d \cos \theta$  را بر حسب  $L_1$ ،  $L_2$  و توابع مثلثاتی زاویه های  $\alpha$  و  $\beta$  بنویسید.

ت) زاویه  $\beta$  را بر حسب  $\frac{L_2}{L_1}$  و توابع مثلثاتی زاویه  $\alpha$  به دست آورید.

ث) نیروی کشش هر کدام از نخها را بر حسب  $mg$ ،  $\frac{L_2}{L_1}$  و توابع مثلثاتی زاویه  $\alpha$  به دست آورید.

ج) به ازای  $\frac{L_2}{L_1} = 1$  نیروی کشش هر کدام از نخها چقدر است؟



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

چ) فرض کنید طول نخها به اندازه ای است که  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  و  $\beta = \frac{\pi}{6}$  باشد. نیروی کشش هر کدام از نخها و اندازه

نیروی دافعه کولنی را بر حسب  $mg$  به دست آورید.

مسئله (۴)

بدان جسم  $m$  سمت راستی

x:  $F \cos \theta - T_2 \sin \alpha = 0$  (۱)

y:  $F \sin \theta + T_2 \cos \alpha - mg = 0$  (۲)

بدان جسم  $m$  سمت چپ

x:  $-F \cos \theta + T_1 \sin \beta = 0$  (۳)

y:  $-F \sin \theta + T_1 \cos \beta - mg = 0$  (۴)

(۲) با تکرار واضح  $T_2$  از معادله (۱) در معادله (۲)

$$F (\sin \theta + \cos \theta \cot \alpha) = mg \quad (۵)$$

و با تکرار دادن  $T_1$  از معادله (۳) در معادله (۴)

$$F (-\sin \theta + \cos \theta \cot \beta) = mg \quad (۶)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\tan \theta = \frac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha) \quad (۷)$$

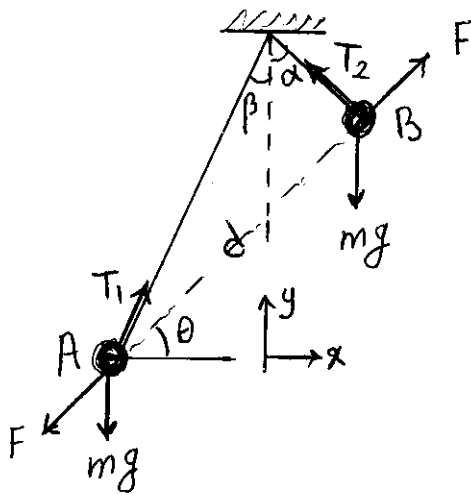
$$\begin{cases} d \sin \theta = L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha \\ d \cos \theta = L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha \end{cases} \quad (۸)$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan \theta = \frac{L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha}{L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha} \quad (۸)$$

(۷) از معادله (۸) با دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\sin \beta = \frac{L_2}{L_1} \sin \alpha \quad (۹)$$



ث) با تکرار تابع  $\sin \beta$  از معادله (9) در معادله (7)

$$\tan \theta = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left( \frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \quad (10)$$

با حذف  $F$  بین دو معادله (1) و (2)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha} \quad (11)$$

و با حذف  $F$  بین دو معادله (3) و (4) و استفاده از معادله (7)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (12)$$

با تکرار تابع (10) در (11)

$$T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (13)$$

با تکرار تابع (10) در (12) و استفاده از معادله (9)

$$T_1 = \frac{2mg \left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (14)$$

ع) به ازای  $L_1 = L_2$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

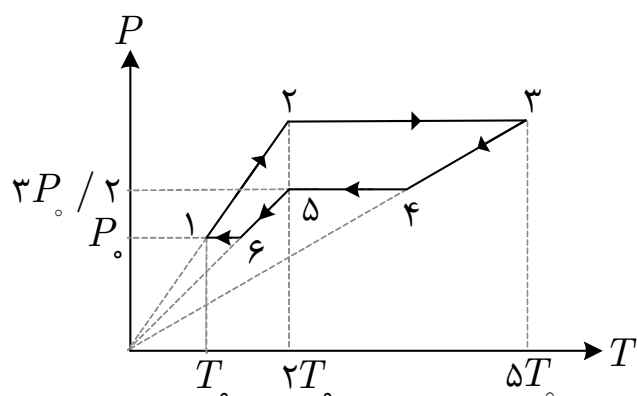
یعنی به ازای  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  و  $\beta = \frac{\pi}{6}$  از معادله (9) خواصم ثابت  $\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

با تکرار تابع  $\frac{L_2}{L_1}$  در معادلات (13) و (14) و  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = mg, \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = \sqrt{3}mg$$

$$F = T_2 = mg$$

از معادله (10) به دست می آید  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  و در نتیجه



۵) چرخه ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند  $n$  مول گاز

کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های  $T_0$  و  $P_0$

معلوم‌اند. ثابت گازها  $R$  است. انرژی داخلی  $n$  مول

گاز کامل تک اتمی با دمای  $T$  برابر  $\frac{3}{2}nRT$  است.

آ) چرخه را در صفحه  $P-V$  رسم کنید و

مختصات  $(P, V, T)$  نقاط متناظر با شش نقطه نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب  $n$ ،  $R$  و  $T_0$  به دست آورید. این کار مثبت است یا

منفی؟

پ) در کدام یک از فرآیندهای  $1 \rightarrow 2$ ،  $2 \rightarrow 3$ ،  $3 \rightarrow 4$ ،  $4 \rightarrow 5$ ،  $5 \rightarrow 6$  و  $6 \rightarrow 1$  گاز از محیط گرما

می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را بر حسب  $n$ ،  $R$  و  $T_0$  به دست آورید.

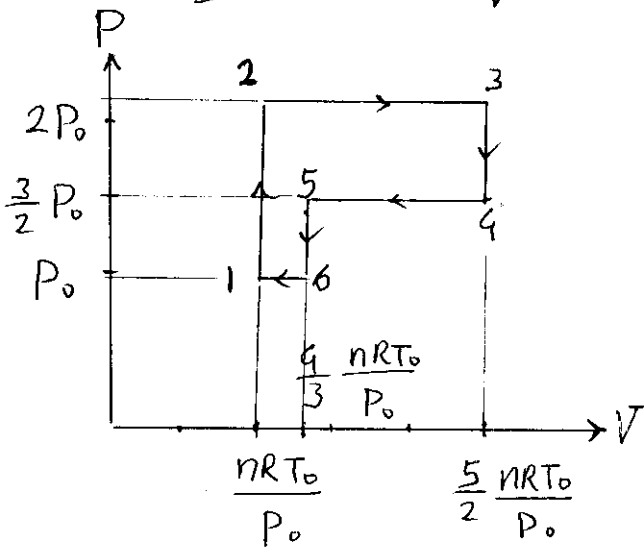
ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

مسئله (۵)

(۲) با توجه به معادله "گاز کامل"  $PV = nRT$  در نمودار  $P$

بر حسب  $T$  شیب (ضریب زاویه)  $\frac{nR}{V}$  است، بنابراین خطوط

دارای شیب یکنواخت هم حجم هستند



نقطه (۱)  $(P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, T_0)$

نقطه (۲)  $(2P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۳)  $(2P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, 5T_0)$

نقطه (۴)  $(\frac{3}{2} P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{15}{4} T_0)$

نقطه (۵)  $(\frac{3}{2} P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۶)  $(P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{4}{3} T_0)$

ب) کار حریف منفی مساحت داخل حریف،  $W$  در صفحه  $P-V$  است

$$|W| = \left( \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2} + \left( \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2}$$

$$|W| = \frac{11}{12} nRT_0$$

پ) اگر  $Q$  گرمای داده شده به "گاز" در یک حریف باشد

$$Q = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$U_2 - U_1 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$\frac{3}{2} nR(2T_0) - \frac{3}{2} nRT_0 = 0 + Q_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2 \rightarrow 3} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$\frac{3}{2} nR(5T_0) - \frac{3}{2} nR(2T_0) = -(2P_0) \left( \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{15}{2} nRT_0$$

$$Q = \frac{3}{2} nRT_0 + \frac{15}{2} nRT_0$$

بنا بر این

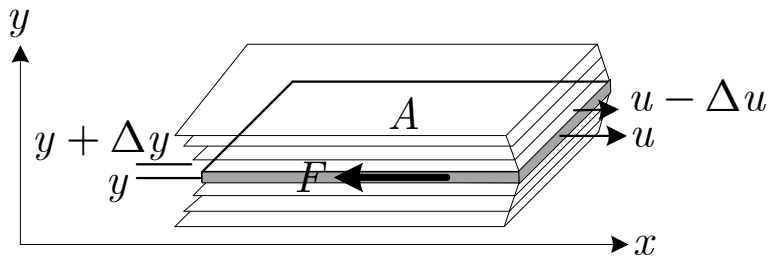
$$\boxed{Q = 9nRT_0}$$

$$\text{بازده} = \frac{\text{حرفه } |W|}{\text{مجموعه داده شده } Q} = \frac{11}{12} \frac{1}{9} \approx \frac{1}{10}$$

(5)

$$\boxed{\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \frac{1}{10}}$$





۶) گرانیروی (Viscosity) خاصیتی از یک

سیال است که باعث کندی حرکت اجسام

نسبت به سیال می‌شود. سیال را به صورت

لایه‌هایی با ضخامت ناچیز  $\Delta y$  در نظر

بگیرید. اگر جسمی در راستای  $x$  با سرعت  $u$  در داخل یک سیال حرکت کند، لایه‌ای از سیال که در مجاورت آن است

تقریباً همراه آن کشیده می‌شود. لایه‌های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانیروی به حرکت در می‌آیند و هر چه در جهت

عمود بر لایه‌های متحرک (راستای  $y$  در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن‌ها کمتر می‌شود. به بیان دیگر اگر

$\Delta u$  اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد،  $\frac{\Delta u}{\Delta y}$  کمیتی مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با

سیال  $A$  باشد نیروی اصطکاک  $F$  در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می‌شود که اندازه آن از رابطه

$$F = \eta A \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|$$

به دست می‌آید. در این رابطه،  $\eta$  ضریب گرانیروی نامیده می‌شود.

آ) واحد ضریب گرانیروی در دستگاه واحدهای SI را بر حسب پاسکال و سایر کمیت‌های اصلی بیان کنید.

اگر یک جسم کروی به شعاع  $r$  با سرعت  $u$  در داخل یک سیال گرانیرو حرکت کند می‌توان نشان داد نیروی اصطکاک

$F = 6\pi\eta r u$  به آن وارد می‌شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می‌شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانیروی را

می‌توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

ب) یک جسم کروی به شعاع  $r$  و چگالی  $\rho$  داخل سیالی به چگالی  $\rho'$  ( $\rho > \rho'$ ) و ضریب گرانیروی  $\eta$  سقوط

می‌کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می‌رسد که به آن سرعت حد می‌گوییم. این سرعت را بر حسب  $\rho$ ،  $\rho'$ ،  $\eta$ ،

$r$  و  $g$  به دست آورید.



پ) سرعت حد سقوط یک قطره کوچک کروی آب به قطر  $0.4 \text{ mm}$  را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره‌ای به قطر  $0.12 \mu\text{m}$  و با چگالی نزدیک آب می‌گیریم، به دست آورید. به داده‌های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطریاش به داخل محفظه‌ای که بین دو الکترود صفحه‌ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می‌کنند. کلیه قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازه زمانی ناچیزی به سرعت حد می‌رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می‌توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می‌توان از بیرون، حرکت یک قطره روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه‌گیری کرد.

ت) در شکل زیر رابطه خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحه بالایی به اندازه  $V$  از صفحه پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا  $u$  مثبت و در حرکت به سمت پایین  $u$  منفی فرض شده است. اگر  $V_0$  و  $-u_0$  به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطه خطی  $u$  بر حسب  $V$  باشد، شعاع قطره روغن و بار روی آن را بر حسب  $u_0$ ،  $V_0$ ،  $\eta$  (ضریب گرانروی هوا)،  $\rho_a$  (چگالی هوا)،  $\rho_0$  (چگالی روغن)،  $g$  (شتاب گرانش) و  $d$  (فاصله عمودی بین الکترودها) به دست آورید.

ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی  $V_0$  و  $u_0$  از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.

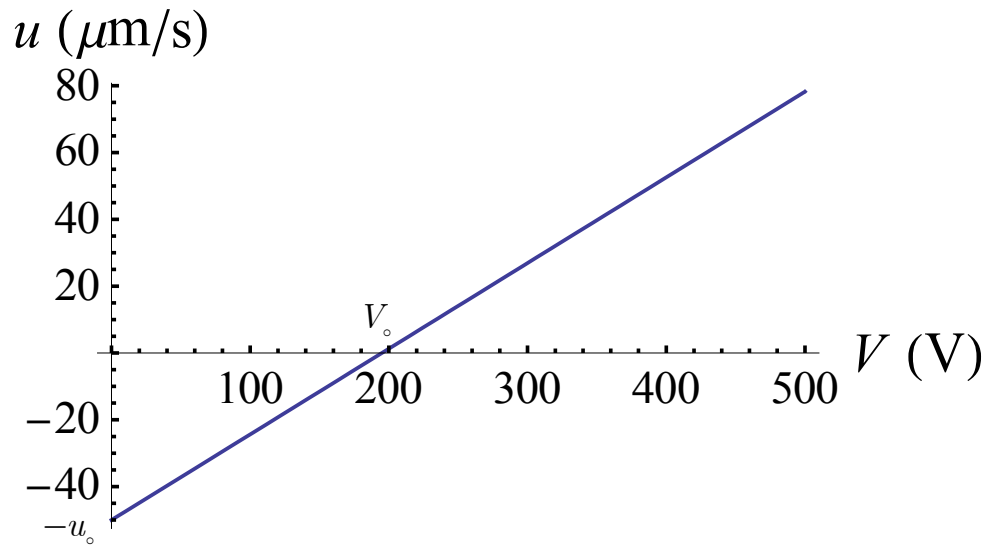


سازمان ملی پژوهش‌های استنادی و تحقیقاتی

داده‌های عددی:

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ (آب)}, \rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3 \text{ (هوا)}, \rho_o = 880 \text{ kg/m}^3 \text{ (روغن)}$$

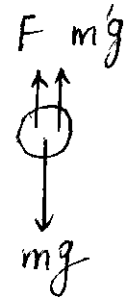
$$\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ (در دستگاه SI)}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, d = 80 \text{ mm}$$



$$\frac{F}{A} = \eta \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right| \Rightarrow Pa = (\eta \omega) \left( \frac{\frac{m}{s}}{m} \right)$$

(1)

$$|(\eta \omega)| = Pa \cdot s$$



(ب)

بدان رسیدن به سرعت صاف - جسم صفر است، در نتیجه

$$F + m'g - mg = 0 \quad (a)$$

$$6 \pi r \eta u_{\infty} + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = 0$$

- F : نیروی اصطکاک
- m'g : نیروی شناور
- mg : نیروی گرانش

$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho') g r^2}{\eta}$$

(پ) برای قطره آب به شعاع  $r = 0.2 \text{ mm}$  که در هوا  $\rho' = \rho_a$  سقوط می کند

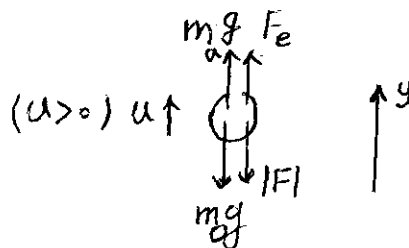
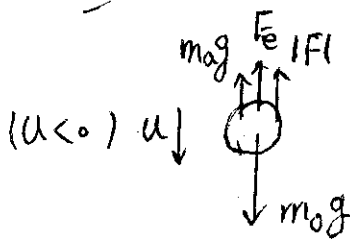
$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_w - \rho_a) g r^2}{\eta} = \frac{2}{9} \frac{(1000 - 1.2)(9.8)(2 \times 10^{-4})^2}{1.8 \times 10^{-5}}$$

$$u_{\infty} = 4.8 \text{ m/s}$$

برای دیدن گردان به شعاع  $r = 0.06 \mu\text{m}$

$$u_{\infty} = 0.44 \mu\text{m/s}$$

(ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله، در حالت تعادل که  $u = 0$  است، نیروی الکتریکی وارد بر قطره روغن باید به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را  $-191 \text{ nC}$  می گیریم.



نمودار جسم آزاد برای حرکت قطره به سمت بالا و پایین:

$$191 \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_a g - 6 \pi \eta r u_{\infty} = 0 \quad \text{در هر دو حالت}$$

$$u_{\infty} = \frac{191 \frac{V}{d}}{6 \pi \eta r} - \frac{2}{9} \frac{(\rho_0 - \rho_a) g r^2}{\eta}$$

از آنجا که  $\rho_a \ll \rho_0$  است از  $\rho_a$  در مقابل  $\rho_0$  چشم پوشی می‌کنیم. با توجه به نمودار:  
 به ازای  $V=0$  داریم  $u_{10} = -u_0$  در نتیجه

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}}$$

به ازای  $u_{10} = 0$  داریم  $V = V_0$  در نتیجه

$$|q| = \frac{q}{3} \pi r^3 \rho_0 g \frac{d}{V_0}$$

با قرار دادن مقدار  $r$  به دست می‌آوریم:

$$|q| = \frac{18 \pi d}{V_0} \sqrt{\frac{\eta^3 u_0^3}{2 \rho_0 g}}$$

(ث) با توجه به نمودار  $u_0 = 50 \mu\text{m/s}$  ،  $V_0 = 195 \text{ V}$  ، در نتیجه:

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}} = 3 \sqrt{\frac{(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(3)(3 \times 10^{-5})}{4 \sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9 \times 10^{-5}}{(4)(33)}$$

$$= \frac{30}{44} \mu\text{m} \Rightarrow |r \approx 0.68 \mu\text{m}|$$

$$|q| = \frac{6 \pi \eta u_0 d}{V_0} r = \frac{(6)(3.14)(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})(8 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-6})}{(195) \times (44)}$$

$$= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65 \times 11} \times 10^{-19}$$

$$= \left(\frac{54}{11}\right) \left(\frac{6.28}{6.5}\right) \times 10^{-19}$$

$$\approx (5)(9.6) \times 10^{-19} \text{ C} = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$|q| = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C} = 3e$$